APLICACIONES MÉTODOS DE FOURIER EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES


Joseph Fourier

Si tienes algún comentario o sugerencias escríbeme a: agb1@latinmail.com

---

1. INTRODUCCION

El aparato del análisis matemático en el transcurso del siglo XVIII se desarrolló con rapidez extraordinaria tomando una forma próximo al actual. La diferenciación y también la integración mediante funciones elementales fueron, en lo fundamental, concluidas. Las ecuaciones diferenciales tanto las ordinarias como las parciales, poco a poco se convirtieron en una parte importante del análisis matemático, en su tratamiento algorítmico-operativo. Junto a la elaboración de los métodos de resolución de las clases independientes de ecuaciones se formaron los elementos de la teoría general.

Sin embargo, la teoría de las ecuaciones diferenciales no podía desarrollarse durante mucho tiempo como un conjunto de procedimientos particulares de resolución de clases pocas numerosas de ecuaciones. La acumulación de estos procedimientos es necesaria, pero no suficiente, para la construcción de una teoría general. Ante los matemáticos cada vez más agudamente se presentaba el problema de la existencia de la solución y de su carácter.

Mucha de las ecuaciones en Física Matemática, son ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden y lineales; esta claro que muchas de estas se obtienen por aplicación de principios básicos del análisis matemático y del análisis en forma detallada de una situación física concreta; así, las ecuaciones en derivadas parciales son de gran interés a causa de su conexión con fenómenos del mudo físico. El ámbito de la Física Matemática debe interpretarse en el sentido de la descripción de los fenómenos de la naturaleza en términos matemáticos. Por consiguiente en esta clase de ecuaciones se hallan no sólo las ecuaciones importantes de la Física Matemática moderna (tales como las ecuaciones de la teoría cuántica de Schrodinger y Dirac) sino también las ecuaciones importantes de la Matemática aplicada e Ingeniería .

La complejidad de la solución de una ecuación lineal, además de depender del orden de la ecuación, depende mucho del número de variables independientes que involucran. Por ello en el presente trabajo se trata de un método particular de solución por el ***método de Fourier****. Por ejemplo la ecuación de Laplace es separable en varios sistemas de coordenadas, tres de los cuales son el sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z), el sistema de coordenadas polares esféricos (r ,j ,q) y el sistema de coordenadas cilíndricas (r , j , z). En estos dos últimos sistemas de coordenadas su estudio es de mayor importancia por sus aplicaciones en* *problemas de Ingeniería, considerando las bases teóricas consistentes se aplica en la solución de la ecuación de onda unidimensional.*

2. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

2.1. ECUACIONES LINEALES

En esta breve introducción a las ecuaciones en derivadas parciales, nos interesamos en ecuaciones lineales en dos variables:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

En donde A, B, C, ..., G son funciones de "x" y "y".
Cuando G(x,y)=0, se dice que la ecuación es **homogénea**; en caso contrario se dice que la ecuación es **no homogénea**. Existen grupos de ecuaciones diferenciales cuya solución es por integración.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 u = e^x$$

La ecuación de segundo orden,
Se resuelve como lo haríamos para una ecuación diferencial ordinaria no homogénea lineal de segundo orden, es decir, primero resolvemos,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 u = 0$$

Considerando a y como constante, se obtiene,

$$u_c = f(y)e^{xy} + g(y)e^{-xy}$$

Luego, para encontrar una solución particular usamos coeficientes indeterminados asumiendo que,

$$u_p = A(y)e^x$$

que sustituyendo en la ecuación diferencial dada resulta,

$$Ae^x - y^2 Ae^x = e^x$$

$$\textit{de donde} \quad A(y) = \frac{1}{1-y^2}, \text{ luego una solución de la ecuación es :}$$

$$u(x,y) = f(y)e^{xy} + g(y)e^{-xy} + \frac{e^x}{1-y^2}$$

Sin embargo la mayoría de las ecuaciones parciales lineales no pueden ser resuelto tan fácilmente como en el ejemplo anterior.

2.2. SEPARACION DE VARIABLES

A veces, para una ecuación diferencial en derivadas parciales lineales homogénea, es posible obtener soluciones particulares en forma de producto,

U(x,y) = X(x)Y(y) (*)

El uso del producto (*), llamado método de separación de variables, permite reducir la ecuación en derivadas parciales a varias ecuaciones diferenciales ordinarias. Con este fin se hace notar que,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = XY'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''$$

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad k > 0 \qquad (\Delta)$$

La ecuación diferencial de segundo orden,

que satisfaga las condiciones u(0,t), u(L,t)=0.

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{KT} = -\lambda^2$$

de donde se obtienen las ecuaciones

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad T' + k\lambda^2 T = 0$$

cuyas soluciones respectivamente son :

$$\{X(x) = k_1 Cos\lambda x + k_2 Sen\lambda x, \qquad T(t) = k_3 e^{-k\lambda^2 t} \qquad (\Delta 1)$$

Si consideramos u(x,y)=X(t)T(t), podemos escribir la ecuación dada como,

Ahora, como: u(0,t)=X(0)T(t)=0

U(L,t)=X(L)T(t)=0 (D $_1$)

Se tiene X(0)=0, X(L)=0 y aplicando esta condición de frontera para la ecuación diferencial (D), aplicando (D $_2$) en (D $_1$), resulta k_1=0, X(x)=k_2Senl x

También, X(L)=k_2Senl L=0 ; pero si k_2=0, entonces X(x)=0, en consecuencia u=0. Para obtener solución no trivial de u, debemos tener k_2' 0 entonces se satisface cuando,

Senl L=0

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \text{ con } n = 1,2,3,\ldots$$

$$\text{luego,} \qquad u(x,y) = (k_2 Sen\lambda x)(k_3 e^{-k\lambda^2 t})$$

$$= k_n e^{-k\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t} Sen\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

lo cual implica que l L=np , es decir,

se escribe k_n para indicar que se obtiene una solución diferente para cada n.

La representación matemática de un fenómeno físico mediante una ecuación en derivadas parciales y un conjunto de condiciones de contorno está bien planteada o bien formulado si verifica dos condiciones. En primer lugar la solución deberá ser única, ya que nuestra experiencia de la naturaleza es que un conjunto dado de circunstancia debe llevar a un resultado único. En segundo lugar, la solución obtenida deberá ser estable. Esto significa un pequeño cambio en las condiciones de contorno producirán únicamente un pequeño cambio en la solución correspondiente. Es crucial este cambio pues las condiciones de contorno llegan mediante experimentación, siempre existirán pequeños cambios errores de observación en sus valores, pero tales errores no deben producir grandes cambios en la solución.

2.3. ECUACION DE LAPLACE

Separación de variables de la ecuación de Laplace en tres sistemas de coordenadas diferentes.

$$\nabla^2 u = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

a. Consideremos en primer lugar, las coordenadas rectangulares cartesianas.

Estas coordenadas son particularmente adecuada para describir regiones (o dominios) del espacio que posean simetría rectangular donde las fronteras se definen simplemente por valores constantes x=a, y=c, z=c, etc. En este sistema la ecuación de Laplace:

es separable, si escribimos u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z), en donde X, Y, y Z son funciones de una sola variable, obtenemos,

$$\frac{1}{XYZ}\nabla^2 u = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \qquad (1)$$

donde cada término de (1) es una función de una sola variable y por lo tanto cada uno de ellos debe ser igual a una cstante. De manera que la ecuación de Laplace es separable en tres ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2X}{dx^2} = \alpha, \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \beta, \qquad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma \qquad (2)$$

en donde a +b +g =0 y con a , b , g constantes arbitrarias.

b. Coordenadas polares cilíndricas

Sea A un punto arbitrario del espacio cuya proyección en el plano xy es el punto B. Entonces, si r=OB, Z=BA y q es el ángulo que forma OB con el eje x positivo, el punto A queda unívocamente definido por las tres coordenadas polares cilíndricas de A, y que están relacionadas con las coordenadas rectangulares cartesianas (x,y,z) de A por las ecuaciones:

x= rcosq , y= rsenq , z= z (3)

de estas ecuaciones se siguen directamente,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (4)$$

Luego, si u es una función de x, y, y z obtenemos,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \text{según } (4)$$

$$= \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \text{según } (3)$$

En consecuencia, el operador

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 \theta}{\partial r\partial\theta} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$= \operatorname{sen}^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} - \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Análogamente, usando (3) y (4), obtenemos,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Luego, usando (5) y (6), obtenemos,
que es la laplaciana de u en coordenadas polares cilíndricas, se puede verificar que una forma equivalente es,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

c. Coordenadas polares esféricas

Sea A un punto cualquiera del espacio cuya proyección en el plano xy, sea el punto B. Entonces, si r= OA, j es el ángulo que forma OB con el x positivo y q el ángulo que forma OA con el eje de las z positivas, el punto A queda unívocamente determinado por las tres coordenadas (r,j ,q), y que son las

coordenadas polares esféricas de A, y están relacionados con las coordenadas rectangulares cartesianas:
x=rcosq cosj , y=rsenq senj , z=rcosq (7)
Efectuando un análisis semejante al de la parte (b) vemos que en coordenadas polares esféricas escribimos,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \wp^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \vartheta^2} + \frac{c\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{r}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \wp^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\operatorname{sen}\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)\right]$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2 \vartheta}\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0, \qquad (8)$$

luego

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha, \qquad \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} = -\wp \qquad (9)$$

Con los resultados de (b) y (c) podemos demostrar, que la ecuación de Laplace Ñ ^{2}u=0 es separable en coordenadas polares cilíndricas, haciendo u(r,q ,z)=R(r)q (q)Z(z) , obtenemos,
en donde a y b son constantes arbitrarias, luego obtenemos:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\alpha - \frac{\wp}{r^2}\right)R = 0 \qquad (10)$$

de esta forma, la ecuación de Laplace se separa en las tres ecuaciones diferenciales ordinarias (9) y (10). Se destaca la ecuación (10) que es conocida como la ecuación de Bessel y sus soluciones-las funciones de Bessel.
OBSERVACION: El hecho de que la ecuación de Laplace sea separable en un sistema particular de coordenadas, no garantiza en absoluto que toda ecuación en la que intervenga la laplaciana Ñ ^{2}u sea separable en dicho sistema de coordenadas. En general debemos comprobar la separabilidad de cada ecuación individualmente.
La ecuación

$$\nabla^2 u + (x^2 + y^2)^2 u = 0$$

No es separable tal como está, pero si lo escribimos en coordenadas polares (r,q), la forma bidimensional de (b) es,

$$\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + r^4 u = 0.$$

si escribimos $\mathrm{u}(\mathrm{r}, \vartheta) = \mathrm{R}(\mathrm{r})\Theta(\vartheta)$ se obtiene,

$$\frac{1}{\mathrm{R}}\left[r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + r^6 R\right] + \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} = 0$$

Luego en estas coordenadas se puede separar en el par de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(r^{6}+\lambda\right)R=0,\qquad \frac{d^{2}\Theta}{d\theta^{2}}=\lambda\Theta$$

en donde l es una constante arbitraria.

3. FUNCIONES ORTONORMALES

3.1. PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Veremos los métodos de resolución de los problemas de valores de contorno, las soluciones generales de una ecuación diferencial en derivadas parciales resultan de poca utilidad debido a la dificultad que representa elegir las funciones arbitrarias de manera que se satisfagan las condiciones de contorno. Esta dificultad se puede evitar para ciertos tipos de ecuaciones en derivadas parciales lineales mediante varias técnicas diferentes, una de las cuales se basa en el principio de superposición según esto, si cada una de las n funciones f_1, f_2, ..., f_n satisface una ecuación en derivadas parciales lineal y homogénea, entonces cada
combinación lineal de estas funciones,

$$f=k_1f_1+k_2f_2+\ldots+k_nf_n=\sum_{i=1}^{n}k_if_i \qquad (1)$$

en donde los k_i , i=1,2,...,n ; son constantes, también satisface la ecuación. Fácilmente ese principio se puede comprobar, suponiendo que f_1, y f_2 son dos funciones de un conjunto de funciones y que L es un operador tal que
$L(k_1f_1+k_2f_2)= k_1L(f_1)+k_2L(f_2)$ (2)
en donde k_1 y k_2 son constantes. Tales operadores se llaman operadores lineales. Ahora si f_3 es otra función del mismo conjunto, se tiene

$$\begin{aligned}L(k_1f_1+k_2f_2+\ldots+k_nf_n)&=L(k_1f_1+k_2f_2)+L(k_3f_3)\\&=k_1L(f_1)+k_2L(f_2)+k_3L(f_3)\end{aligned} \qquad (3)$$

En general podemos probar con facilidad con facilidad que para toda combinación lineal arbitraria de n funciones f_1, f_2,...,f_n se tiene

$$L\left(\sum_{i=1}^{n}c_if_i\right)=\sum_{i=1}^{n}k_iLf_i \qquad (4)$$

El operador D es un operador diferencia l lineal en el conjunto de todas las funciones de de una variable que son derivables por lo menos una vez. Similarmen te $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ son ope - radores diferencia les lineales en el conjunto de las funciones de dos variables independie n - tes x, y los cuales son derivables por lo menos una vez respecto de x y de y..

Cada ecuación en derivadas parciales lineal y homogénea se escribe en la forma:

Lv, (5)

en donde L es un operador lineal y u es la variable dependiente. En consecuencia ,

$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ son ambos operadores diferencia les lineales, y que la ecuación de Laplace en dos dimensione s se puede escribir en la forma (5) en donde L es el operador diferen - cial lineal $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

De la misma forma, la ecuación en derivadas parciales lineal y homogénea de segundo orden

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2h\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + b\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2f\frac{\partial v}{\partial y} + 2g\frac{\partial v}{\partial y} + ev = 0 \qquad (7)$$

Donde a, h,b, f, g y e son pueden ser funciones en x e y, se puede escribir en la forma (5) considerando

$$L \equiv a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2h\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2f\frac{\partial}{\partial y} + 2g\frac{\partial}{\partial y} + e = 0 \qquad (8)$$

A continuación vemos, de (4) y (5), que si f_i , i=1,2,..,n ; satisface la ecuación en derivadas parciales Lf_i = 0, entonces toda combinación lineal arbitraria de tales soluciones es tambien una solución. Este es el **"principio de superposición".**

Por otro lado si fuese posible encontrar este conjunto de soluciones f_i para una cierta ecuación en derivadas lineal y homogénea sería escogiendo combinaciones lineales adecuadas que verificasen todas las condiciones de contorno. Para obtener este conjunto de soluciones usaremos el llamado método de separación de variables. Se debe suponer que la variable dependiente es un producto de funciones cada una de las cuales depende sólo de una variable independiente. La combinación de los métodos de separación de variables y de superposición se conoce usualmente con el nombre de **método de Fourier.**

3.2. FUNCIONES ORTONORMALES

A diferencia del análisis vectorial, donde el concepto de ortogonal es sinónimo de perpendicular, en el presente contexto el término ortogonal con la condición carece de significado geométrico.

DEFINICION.- Un conjunto de funciones de valores reales,

$$\phi_1(x),\ \phi_2(x),\ \phi_3(x), \ldots,$$

se dice ortogonal en un intervalo $a \le x \le b$ si,

$$\int_a^b \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n$$

Al número

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi^2{}_n(x)\,dx$$

se llama norma cuadrada

$$\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi^2 n(x)dx}$$

es la norma de función f $_n$(x).

Si $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal en $a \le x \le b$ y tiene la propiedad de que $\|\phi_n(x)\| = 1$ para n = 0,1,2,..., entonces se dice que $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortonor - mal en el intervalo $a \le x \le b$.

Se puede demostrar que el conjunto {1, cox, cos2x,...} es ortogonal en el intervalo x Î [-p ,p].

Identificamos por,

$$\phi(x) = 1 \text{ y } \phi_n(x) = \cos nx, \text{ entonces hay que demostrar que } \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\,\phi_n(x)dx = 0$$

$$n \neq 0 \text{ y que } \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\,\phi_n(x)dx = 0, \quad m \neq n$$

En el primer caso tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\,\phi_n(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\ &= \left[\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \quad n \neq 0\end{aligned}$$

y en el segundo,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\,\phi_n(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \quad m \neq n\end{aligned}$$

Si se quiere hallar la norma, para f $_o$(x)=1, obtenemos,

$$\|\phi_0(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

de modo que $\|\phi_0(x)\| = \sqrt{2\pi}$. Para $\phi_n(x) = \cos nx$, $n > 0$, se tiene

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1 + \cos 2nx]dx = \pi$$

de modo que para $n > 0$, $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\pi}$

Sin embargo cualquier conjunto ortogonal de funciones no nulas $\{f_n(x)\}$, siendo n=0,1,2,3,..., puede ser normalizado, esto es, puede ser transformado en un conjunto ortonormal dividiendo cada una entre su norma.

DEFINICION.- Todo conjunto de funciones $\{f_n(x)\}$, n=0,1,2,3,..., es de funciones ortonormales en <0,L>, si

$$\int_0^L \varphi_n(x)\ m(x)\,dx = \delta_{nm}, \qquad n, m = 1,2,3,...$$

en donde δ_{nm} es la delta de Kronecker definida por

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

En general, un conjunto de funciones $\{\varphi_n(x)\}$ se llama ortonormal en el intervalo $[a, b]$ respecto de la función de peso w(x), si

$$\int_a^b w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \delta_{nm}, \qquad n, m = 1,2,3,...$$

El conjunto infinito de funciones,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Es ortonormal en el intervalo <-p ,p > respecto de la función de peso w(x)=1.

Existen otros conjuntos de funciones ortonormales, uno de los cuales muy conocido es la sucesión de polinomios de Legendre definidos por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^2}\left[\left(x^2 - 1\right)^n\right]$$

Para n=0,1,2,...

Tenemos que los primeros de estos términos polinomios son;

$$P_0(x) = 1,\quad P_1(x) = x,\quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left[35x^4 - 30x^2 + 3\right]$$

3.3. DESARROLLO DE UNA FUNCION EN SERIE DE FUNCIONES ORTONORMALES

Parecido a lo que ocurre en el espacio de tres dimensiones en lo que todo vector,

$\overline{a}$ se puede representar como una combinació n lineal de los vectores unitarios $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, es decir :

$$\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$$

donde a_i î R, i=1,2,3.

$$f(x) = k_1\varphi_1(x) + k_2\varphi_2(x) + \ldots + k_n\varphi_n(x) \qquad (\alpha_1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} k_n\varphi_n(x) \qquad (\alpha\alpha$$

Dada una función cualesquiera f(x) definida en un intervalo <a,b> se puede escribir como una combinación lineal de una infinidad de funciones ortonormales, así
en donde los k_n son constantes.
La serie (a) se conoce como la serie de Fourier generalizadas. Donde, multiplicando (a_1) por $f_n(x)$ e integrando sobre el intervalo resulta,

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx = k_0\int_a^b \varphi_0(x)\varphi_m(x)\,dx + k_1\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_m(x)\,dx + \ldots +$$
$$k_n\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx + \ldots$$

Considerando la ortogonalidad, cada término del segundo miembro de la última ecuación es cero excepto cuando m=n. Y en este caso tenemos,

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = k_n \int_a^b \varphi^2{}_n(x)\,dx$$

de donde los coeficient es requeridos son

$$k_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b \varphi^2{}_n(x)\,dx}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

En resumen, si $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \varphi_n(x)$

entonces $\quad k_n = \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\|\varphi_n(x)\|^2}$

Análogamente, si $\{f_n(x)\}$ es ortogonal con respecto a una función de peso w(x) en <a,b>, entonces multiplicando (a_1) por $w(x)f_m(x)$ e integrando, resulta

$$k_n = \frac{\int_a^b f(x)\,w(x)\varphi_n(x)\,dx}{\|\varphi_n(x)\|^2}$$

en donde,

$$\|\varphi_n(x)\|^2 = \int_a^b w(x)\varphi^2{}_n(x)\,dx$$

si suponemos que las funciones $\varphi_n(x)$ son ortonormal es en un intervalo $\langle a,b \rangle$ respecto de una función de peso w(x), es decir

$$\int_a^b w(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \delta_{nm}$$

tenemos ,

$$w(x)f(x)\varphi_m(x) = k_1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_m(x) + k_2 w(x)\varphi_2(x)\varphi_m(x) + \ldots + k_m w(x)\varphi_m(x)\varphi_m(x) + k_{m+1} w(x)\varphi_{m+1}(x)\varphi_m(x) + \ldots$$

que integrando cada miembro en <a,b> se obtiene

$$\int_a^b w(x) f(x)\, \phi_m(x)dx = k_1 \int_a^b w(x)\, \phi_1(x)\, \phi_m(x)dx + k_2 \int_a^b w(x)\, \phi_2(x)\, \phi_m(x)dx + \ldots$$

$$+ \mathrm{k_m} \int_a^b w(x)\, \phi_m(x)\, \phi_m(x)dx + \ldots$$

que por la ortonormalidad, resulta

$$\mathrm{k_m} = \int_a^b w(x) f(x)\, \phi_m(x)dx$$

Para que todos estos desarrollos tengan utilidad es conveniente que el conjunto de funciones ortonormales satisfaga la condición de completitud. Un conjunto de funciones ortonormales $f_n(x)$ es completo si es imposible añadirle otra función no nula que sea ortogonal a cada una de las $f_n(x)$. El sistema de funciones,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots,$$

donde no está la función,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}}$$

forma un conjunto ortonormal incompleto de funciones (es así mismo un conjunto ortonormal)
Así, la validez del desarrollo de f(x) en la forma (a) estrictamente debe estar ligada a la convergencia de la serie a f(x).
El problema de probar la completitud de conjuntos ortonormales de funciones y la relación con la convergencia de la serie de la forma (a) corresponde a un área de las matemáticas llamada análisis funcional (importancia espacio de Hilbert). Se indica en el presente trabajo que las funciones que se usan corrientemente en Física Matemática son completo.

3.4. LA ECUACION DE STURM-LIOUVILLE

En la ecuación de onda unidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

que satisfaga en la frontera las condiciones de Cauchy,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq L$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,0) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq L$$

La técnica de separación de variables conduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias de X(x) y de T(t)

$$\frac{d^2X}{dx^2} = kX \qquad (a_2)$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} = kc^2T$$

y que al resolver la ecuación (a_2) para X(x) sujeta a las condiciones de contorno dadas aparece un conjunto de funciones ortonormales.
El método de separación de variables, cuando se aplica a ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden, normalmente nos lleva a una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\phi(x)\right) + (q + \lambda r)\,\phi(x) = 0, \qquad (a_3)$$

$a \le x \le b$, con λ parámetro y $\phi(x)$ es la variable dependiente.

en donde p, q , r son funciones de x, definidas en un intervalo,
Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Sturm-Liouville y genera, cuando se exige ciertas condiciones de contorno, conjunto de funciones ortogonales que, muchas veces conducen a la solución de la ecuación en derivadas parciales.
Observar que la ecuación (a_2) es un caso particular de (a_3) que se obtiene haciendo p=1, q=0, r=1, l =-k, y f (x)=X(x).
La ecuación (a_3) dadas las condiciones de contorno de una forma especial, sólo tendrá soluciones particulares para ciertos valores de l . De manera que ésas soluciones serán las funciones propias de (a_3), y los correspondientes valores para l
Serán los valores propios.
Considerando $f_n(x)$ y $f_m(x)$ dos funciones propias diferentes de (a_3) que corresponde a los valores propios l_n, l_m, tenemos,

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\phi_n(x)\right) + (q + \lambda_n r)\,\phi_n(x) = 0 \qquad (b_1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\phi_m(x)\right) + (q + \lambda_m r)\,\phi_m(x) = 0 \qquad (b_2)$$

multiplicando (b_1) por $\phi_m(x)$, obtenemos

$$\phi_m(x)\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\phi_n(x)\right) + (q + \lambda_n r)\,\phi_m(x)\,\phi_n(x) = 0 \qquad (b_3)$$

Multiplicando (b_2) por $f_n(x)$ se obtiene,

$$\phi_n(x)\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\phi_m(x)\right) + (q + \lambda_m r)\phi_n(x)\phi_m(x) = 0 \qquad (\beta_4)$$

restando las ecuaciones (β_3) y (β_4) tenemos,

$$\phi_m(x)\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\phi_n(x)\right) - \phi_n(x)\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\phi_m(x)\right) = (\lambda_m - \lambda_n) r\,\phi_m(x)\phi_n(x)$$

de donde,

$$(\lambda_m - \lambda_n) r\,\phi_m(x)\phi_n(x) = \frac{d}{dx}\left(p\,\phi_m(x)\phi_n'(x) - p\,\phi_n(x)\phi_m'(x)\right)$$

ahora integrando en $\langle a, b\rangle$ obtenemos,

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b r\,\phi_m(x)\phi_n(x)dx = \left[p\,\phi_m(x)\phi_n'(x) - p\,\phi_n(x)\phi_m'(x)\right]_a^b$$

Si,

$$\left[p\,\phi_m(x)\phi_n'(x) - p\,\phi_n(x)\phi_m'(x)\right]_a^b = \left(p(b)\phi_m(b)\phi_n'(b) - p(b)\phi_n(b)\phi_m'(b)\right)$$
$$-\left(p(a)\phi_m(a)\phi_n'(a) - p(a)\phi_n(a)\phi_m'(a)\right) = 0 \qquad (\beta_5)$$

Entonces

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b r\,\phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0$$

y como $\lambda_m \neq \lambda_n$, resulta que las funciones $\phi_m(x)$ y $\phi_n(x)$ son ortogonales en <a,b> considerando como función de peso r(x).
Se observa que la ecuación (β_5) se satisface de varias formas según las condiciones de contorno impuesta a $\phi(x)$.
Así (β_5) se satisface según se escriba una de las condiciones:

a. - $\phi_m(a) = \phi_m(b) = 0$

b. $\phi_m'(a) = \phi_m'(b) = 0$,

c. - $\phi_m(a)\phi_n'(a) - \phi_n(a)\phi_m'(a) = \phi_m(b)\phi_n'(b) - \phi_n(b)\phi_m'(b) = 0$

Pero si consideramos como condiciones de contorno,

$$(\beta_7) \qquad \begin{cases} k_1\phi_m(a) + k_2\phi_m'(b) = 0 \\ k_1\phi_n(b) + k_2\phi_n'(b) = 0 \end{cases}$$

$$(\beta_6) \qquad \begin{cases} c_1\phi_m(a) + c_2\phi_m'(a) = 0 \\ c_1\phi_n(a) + c_2\phi_n'(a) = 0 \end{cases}$$

siendo $c_1, c_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, de modo que c_1 y c_2 solo tomarán valores no nulos si el Wronskiano es :

$$\begin{vmatrix} \phi_m(a) & \phi_n(a) \\ \phi_m'(a) & \phi_n'(a) \end{vmatrix} = \phi_m(a)\phi_n'(a) - \phi_n(a)\phi_m'(a) = 0$$

De la misma en (b $_7$) , k_1 , k_2 solo tomarán valores no nulos cuando W(f $_m$(x),f $_n$(x))(x=b)=0; decir:

$$\begin{vmatrix} f_m(b) & f_n(b) \\ f'_m(b) & f'_n(b) \end{vmatrix} = f_m(b)\, f'_n(b) - f_n(b)\, f'_m(b) = 0$$

En consecuencia condiciones de contorno que son combinaciones lineales de funciones propias y de sus derivadas en los puntos extremos de <a,b>, resultan también funciones propias de la ecuación de Sturm-Liouville que son ortogonales respecto de la función de peso r(x) en <a,b>. Tambien se observa que todas estas condiciones de contorno son homogénea, es decir si se tiene f y se cambia por Kf la condición de contorno no varían, k es una constante real.

4. ECUACIONES ESPECIALES-MODELOS MATEMATICOS

Las siguientes ecuaciones diferenciales parciales lineales

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0 \qquad (d1)$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (d2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (d3)$$

desempeña un papel importante en muchas áreas de física e ingeniería, (d 1) es conocida como la ecuación del calor en una dimensión, (d 2) es la ecuación en una dimensión, (d 3) se llama la ecuación de Laplace

4.1. CUERDAS VIBRANTES Y LA ECUACION DE ONDA UNIDIMENSIONAL

Aunque Fourier sistematizó el método de separación de variables, las soluciones en series trigonométricas de ecuaciones viene del siglo XVIII en las investigaciones de Euler, D´Alambert y Daniel Bernoulli relativas a cuerdas vibrantes. Para deducir la ecuación diferencial que sirve de modelo a las vibraciones de una cuerda.

Consideremos una cuerda flexible y uniforme cuya densidad lineal r (en gramos por centímetro) que es estirada bajo una tensión T (dinas o libras) entre los puntos fijos x=0 y x=L. Supongamos que cuando la cuerda vibra en el plano xy en torno a su posición de equilibrio, cada punto se mueve paralelamente al eje Y de modo que podemos designar como u(x,t) el desplazamiento en el instante t del punto x de la cuerda. Entonces para cualquier valor dado de t, la forma de la cuerda en ese instante es la curva u(x,t). Se asume también que la deflexión de la cuerda es tan pequeña que resulta bastante exacta la aproximación, (ver figura 2.3)

$$\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$$

Finalmente se supone, que además de las fuerzas internas de tensión que actúan tangencialmente sobre la cuerda, existe una fuerza externa vertical con la densidad lineal F(x) (dinas por centímetro o libras por pie)

Aplicando la ley de Newton,

$$F = m\bar{a}$$

Al pequeño segmento de la cuerda de masa r D x correspondiente al intervalo [x, x+D x] donde,

$$\bar{a} \quad \text{es la vertical} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\bar{x}, t) \quad \text{de su punto medio}$$

de manera que viendo las componentes de la figura 2.3, tenemos

$$(\rho\Delta x)\frac{\partial}{\partial t^2} u(\bar{x}, t) \approx T(\text{sen } \theta + \Delta\theta) - T \text{ sen } \theta + F(\bar{x})\Delta x$$

$$\approx T \frac{\partial}{\partial x} u(x + \Delta x, t) - T \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + F(\bar{x})\Delta x$$

dividiendo entre D x se tiene,

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\bar{x}, t) = T \frac{\frac{\partial}{\partial x} u(x + \Delta x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)}{\Delta x} + F(\bar{x})$$

Al tomar el limite cuando $\Delta x \to 0$ y $\bar{x} \to x$ se obtiene la ecuación diferencia l parcial

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial^2} u(x, t) = T \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + F(x) \qquad (\varepsilon)$$

que describe las vibraciones verticales de una cuerda flexible, considerando constante de densidad lineal a r su tensión es T y que está bajo la influencia de una fuerza vertical externa cuya densidad lineal esta dada por F(x).
Ahora si hacemos

$$a^2 = \frac{T}{\rho} \quad \text{y} \quad F(x) = 0$$

En la ecuación (e), se obtiene la ecuación de onda unidimensional,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (\varepsilon_1)$$

(e_1) sirve de modelo a las vibraciones libres de una cuerda flexible y uniforme.

Condiciones en los puntos extremos: los extremos fijos de la cuerda en los puntos x=0 y x=L del eje de las x dan

U(x,t)=0 , u(L,t)=0

La experiencia física de la situación indica que el movimiento de la cuerda quedará determinado si especificamos tanto su función de posición inicial, así como su función velocidad inicial.

Función de posición inicial:

u(x,0)=f(x), 0<x<L

Función de velocidad inicial

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x), \qquad 0 < x < L$$

:

de manera que el problema con condiciones en la frontera queda formulado como,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0 \qquad (c)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \ge 0, \qquad (c_1)$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L \qquad (c_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = g(x), \qquad 0 \le x \le L \qquad (c_3)$$

para la función desplazamiento u(x,t) de una cuerda que vibra libremente con sus extremos fijos, posición inicial f(x) y velocidad inicial g(x).

5. APLICACIONES DEL METODO DE FOURIER

El método de Fourier esta basado en la separación de variable, y superposición de soluciones.
Aplicamos en la solución de la ecuación de **onda unidimensional**.
Suponemos una solución separable de (c) en la forma:

u(x,t)=X(x)T(t) (c_4)

De modo que separando variables se obtiene el par de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda X \qquad (c_5)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \lambda a^2 T \qquad (c_6)$$

Ahora podemos obtener las funciones X y T resolviendo estas ecuaciones, pero debemos asegurarnos de que la solución u(x,t) dada por (c_4) satisface los valores de contorno, (c_1), es decir,

u(0,t)=X(0)T(t)=0 , u(L,t)=X(L)T(t)

Luego asumiendo T(t)¹ 0, tenemos X(0)=X(L)=0.

Se puede analizar los casos l **=0, l >0, l <0.**

CASO 1. **Si l =0** tenemos en (c_6)

X(x)=Ax+B

Considerando las condiciones iniciales (c_1) se obtiene A=0, B=0, luego X(x)=0 y entonces u(x,t)=0.

CASO 2. **Si l >0**, l =w^2. Entonces (c_6) nos conduce a

X(x)=Ae^{wx} + Be^{-wx}

Que juntando con (c_1) nos proporciona A=B=0. De nuevo resulta la solución trivial u(x,t)=0.

CASO 3. Si l <0, l =-w^2. Entonces en este caso (c_1) nos da

X(x)=Acos(wx)+Bsen(wx) (c_9)

De la que podemos deducir, usando (c_6), la solución no trivial u(x,t)=Bsen(wx), B es arbitrario con sen(wL)=0, de donde el parámetro tiene la forma:

$$w = \frac{r\pi}{L}, \qquad r = 1,2,3,\ldots \qquad [*]$$

Si r=0 da w=0, se excluye ya que da como resultado la solución trivial u(x,t)=0.

Ahora resolviendo (c_7) con l =-w^2 tenemos, T(t)= Ccos(wat)+Dsen(wat) (c_{10})

En donde C y D son constantes de integración. Luego según (*), la solución (c_4) tiene la forma,

u(x,t)=X(x)T(t)=sen(wx)[Ccos(wat)+Dsen(wat)], (c_{11})

en donde hemos hecho la constante B igual a la unidad para simplificar. Ahora, por (*) vemos que existe un conjunto discreto infinito de valores de w (los valores propios o valores característico) y en consecuencia a cada valor de w le corresponderá una solución particular (la función propia o función característica) que tiene la forma (c_{11}). Estas son,

$$w_1 = \frac{\pi}{L} \quad u_1(x,t) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(C_1 \cos\left(\frac{\pi a t}{L}\right) + D_1 \,\text{sen}\left(\frac{\pi a t}{L}\right)\right),$$

$$w_2 = \frac{2\pi}{L} \quad u_2(x,t) = \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left(C_2 \cos\left(\frac{2\pi a t}{L}\right) + D_2 \,\text{sen}\left(\frac{2\pi a t}{L}\right)\right),$$

– (c12)

$$w_r = \frac{r\pi}{L} \quad u_r(x,t) = \text{sen}\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\left(C_r \cos\left(\frac{r\pi a t}{L}\right) + D_r \,\text{sen}\left(\frac{r\pi a t}{L}\right)\right),$$

– –

Y así sucesivamente, siendo C_1, C_2, ..., C_r , D_1, D_2, ..., D_r,... ; constantes arbitrarias, cada una de estas expresiones de u(x,t)=0 es una solución de la ecuación de ondas que satisface las condiciones de contorno dada. Ahora dado que (c) es una ecuación lineal, toda combinación lineal de estas ecuaciones es asimismo una solución. Por consiguiente tomamos la combinación lineal,

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty}\left[C_r \cos\left(\frac{r\pi a t}{L}\right) + D_r \,\text{sen}\left(\frac{r\pi a t}{L}\right)\right]\text{sen}\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \qquad (c_{13})$$

como solución general de (c) que satisface las condiciones de contorno. Las constantes arbitrarias C_r y D_r de esta solución deberán elegirse de forma que se satisfagan las condiciones de contorno en t=0.

Consideremos en primer lugar,

U(x,0)=f(x), 0 £ x £ L,

Entonces, haciendo t=0 en (c_{13}) tenemos

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \,\text{sen}\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \qquad (c_{14})$$

Análogamente aplicando la condición,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \qquad 0 \le x \le L$$

se satisface derivando (c_{13}) respecto de t y haciendo t=0, obtenemos:

$$g(x) = \frac{\pi a}{L} \sum_{r=1}^{\infty} r D_r \,\text{sen}\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \qquad (c_{15})$$

Ahora podemos determinar los conjuntos de coeficientes C y D, a partir de (c_{14}) y (c_{15}) mediante la técnica de las series de Fourier,

$$C_r = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \qquad (c_{16})$$

y

$$D_r = \frac{2}{r\pi a}\int_0^L g(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{r\pi x}{L}\right)dx \qquad (c_{17})$$

en donde r= 1,2,3,...
Luego, sustituyendo (c_{16}), (c_{17}) en (c_{13}) tenemos la solución,

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty}\{[\frac{2}{L}\int_0^L f(x')\,\mathrm{sen}\left(\frac{r\pi x'}{L}\right)dx']\cos\left(\frac{r\pi at}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{r\pi x}{L}\right) + [\frac{2}{r\pi a}\int_0^L g(x')\,\mathrm{sen}\left(\frac{r\pi x'}{L}\right)dx']\,\mathrm{sen}\left(\frac{r\pi at}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{r\pi x}{L}\right)]\}$$

En la que hemos escrito x´ para distinguir la variable de integración de la variable dependiente x. Esta función es una solución de (c) que satisface las condiciones de contorno (c_1), (c_2) y (c_3).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Castro Figueroa, Abel, Ecuaciones en derivadas parciales, edit. Addison Wesley Iberoamericana, 1997.
2. Dusandikoetrea Zuazo Javier, Análisis de Fourier, Addison-Wesley, EUA, 1995.
3. Edwards C.H., Jr. Penney David E; Ecuaciones diferenciales elementales y problemas con condiciones en la forntera, México, 1993.
4. G. Stephenson, Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales, edit. Reverté, s.a, 1982.
5. Marcellán F., Casasús L., Zarzo A., ecuaciones diferenciales, problemas lineales y aplicaciones, Mc Graw Hill, España, 1990.
6. Miller Frederic H, Partial differential equations, Johon Willey, 1965.
7. Peral Alonso, Ireneo; Ecuaciones en derivadas parciales, Addison Wesley, EUA, 1995.
8. Rafael Iório Júnior, Valeria de Magalhaes Iório; Equacoes diferencias parciais: una introducao, Impa, 1988.
9. Sminnov, M.M., Problemas de ecuaciones de la física matemática, MIR, 1976.
10. Sneddon Ian N, Elements of partial differential equations, Edit. Mac Graw Hill, 1957.
11. Wembergen Hans F., Ecuaciones en derivadas parciales, Reverté, s.a, españa, 1996.

Joseph Fourier (1768-1830):

Francés. Su padre era sastre. Había sido muy buen estudiante de matemáticas, pero quería ser oficial del ejército. Como se le negó una comisión, debido a su origen humilde, se refugió en el sacerdocio. Mas tarde aceptó la oferta de ser profesor de matemáticas en la escuela militar a la que había asistido.
En 1798 acompañó a Napoleón, junto con Monge, en su aventura egipcia. La contribución más importante de Fourier fue la idea de que cualquier función, y = f(x), puede representarse por una serie de la forma:

$$y = a_0/2 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx + \ldots\ b_1\mathrm{sen}x + b_2\mathrm{sen}2x + \ldots + b_n\mathrm{sen}nx$$

en la que $a_0 = 1/p$ ò $f(x)dx$ *y* $a_n = 1/p$ ò $f(x)\cos nx\,dx$
Fourier y Monge, cayeron en desgracia cuando Napoleón se exilió en 1815 y restauró la monarquía borbónica.

Comentarios a: agb1@latinmail.com