TÍTULO: INFLUENCIA DEL TRAZADO DE FUNCIONES Y LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS A TRAVÉS DE PROCEDIMIENTOS ELEMENTALES EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO.

Autores: Juan A. Martin Alfonso. (*)
Otoniel Riverón Portela. (*)
Ángel Gómez Argüelles. (**)
Idalia González Companionis. (*)
Dirección: (*) Universidad de Ciego de Ávila, Km. 9 carretera Ciego Morón. Cuba.
Teléfonos: 033266434, 2-5337 Fax 033266365
E-mail: oto@centic.unica.cu

(**) Instituto Superior Pedagógico "Manuel Ascunce Doménech", Km1/2 carretera a Ceballos. Ciego de Ávila. Cuba.
Teléfonos: 023554, 027120, 8952.

RESUMEN:

En este trabajo se hace un análisis de las propiedades y operaciones con funciones para el trazado de gráficos y la solución de problemas intra y extra matemáticos. Se ilustra mediante ejemplos de trazado de gráficos, solución de problemas de extremos y resolución de inecuaciones las potencialidades de este contenido en el desarrollo de los procedimientos lógicos del pensamiento.

INTRODUCCIÓN:

Función es uno de los conceptos centrales de la matemática. Los programas de enseñanza de la escuela cubana pretenden que el alumno pueda relacionar gráficos con propiedades y funciones, sin embargo la experiencia y la opinión de un gran número de docentes coinciden en que la gran mayoría de los escolares no dominan los gráficos de las funciones elementales, que no pueden realizar el trazado del gráfico de una función; cuestión que se justifica con el hecho de que los contenidos del Cálculo Diferencial fueron eliminados (temporalmente) de los objetivos de la enseñanza. En el mejor de los casos los estudiantes aprenden de memoria las propiedades de las funciones, y un número considerable de ellos no puede aplicar estas propiedades a la solución de ejercicios y problemas.

Por otra parte las exigencias evaluativas al respecto se reducen a la determinación del dominio de una función o de una operación con funciones, o al clásico ejercicio de dada una o dos funciones formular una proposición que conduzca al planteamiento y solución de una ecuación o inecuación. Existen un gran número de ejercicios y problemas tanto intra como extra matemáticos que pueden ser resueltos a partir del conocimiento del gráfico de las funciones elementales, de la interpretación de las operaciones con funciones y del trazado del gráfico de una función a partir de estos dos elementos. No hay conciencia que este contenido es esencial en la formación y desarrollo de los procedimientos lógicos de los escolares.

La intención de tratar estos conceptos, para mejorar las condiciones del aprendizaje de las matemáticas, requiere de un estudio minucioso, profundo y detallado del desarrollo del pensamiento. Al respecto, la Psicología cognoscitiva sostiene que lo que se aprende debe ser racional y estructurado: el problema principal al cual se enfrenta el estudiante consiste en relacionar un orden exterior con un orden interior; a ello la epistemología-psicología lo denomina "cultivo de la racionalidad". El alumno y el profesor saben que el contenido conlleva a la adquisición de un conocimiento nuevo; pero también deben saber que hay una lógica interna del problema planteado y que el alumno puede construir ese conocimiento sin apelar a una razón didáctica impertinente; de tal manera que el docente efectúa no sólo la comunicación de un conocimiento, sino también la transmisión de "un buen problema" (Brosseau, 1981). Por cuanto en la medida en la cual se logra profundizar en un hecho, en esa medida el dominio sobre el conocimiento es mayor y mejor.

Por lo tanto una didáctica que pretenda fundamentarse en la experiencia (no en el empirismo) debería destacar cuáles son las experiencias necesarias para desencadenar la actividad lógico-matemática; la empiria no proviene de los objetos, sino de la actividad sobre los objetos (Piaget, 1982). Sin embargo, también hay que tomar en consideración que si bien la afirmación anterior puede ser cierta, el conocimiento proviene de las propiedades reales de la realidad y éstas son tan importantes como las operaciones sobre el objeto de conocimiento. La planificación de ejercicios y problemas que permita el acceso al aprendizaje lógico-matemático es "una necesidad social" e implica la "actualización" de la acción educativa.

DESARROLLO:

Aspectos Epistemológicos

En toda problemática hay un cognoscente y un objeto por conocer, un contexto y las relaciones entre estos aspectos. Un problema donde aparezcan representaciones, propiedades, determinación de monotonías, búsquedas de cotas y extremos, no es un hecho, sino que el estudiante debe hacer una demostración lógica y matemática. De acuerdo con G. Vernaud (citado por Brosseau, 1991) no hay que confundir el cálculo analítico- algebraico que permita la solución de un problema con la lógica natural en la cual se apoya la solución. Una característica (buena o mala) es la forma común de presentar los problemas: planteamientos y preguntas, los docentes deberían pensar si esta forma tiene virtudes y/o inconveniencias. En estos problemas aparecen expresiones como: "son", "el dominio es", "tiene paridad", "mayor que", "menor que", "entre", etc. El alumno debe aprender a descodificar su significado (y más aún, que el estudiante debe someterse a una normatividad).

El aprendizaje debe tender al desarrollo de estructuras cognoscitivas que permitan acceder al conocimiento con el "menor desgaste posible". Sabemos que las personas están en capacidad para realizar inferencias ya que la vida mental comienza con la percepción del objeto de conocimiento (noción de número, clase, espacio, tiempo, etc.). Sin embargo, hay ciertas partes del objeto de conocimiento que los alumnos no perciben (pero puede haber una ligera sospecha de que están ahí) y si no sabe es porque no ha desarrollado la capacidad para "estar consciente" que esas partes están ahí. Por otra parte esa vida mental posee la particularidad de ser solidarias con las operaciones interiorizadas (Piaget, 1974).

La vida mental de las personas es un producto de las experiencias obtenidas en unas relaciones sociales, que su conocimiento es producto de un desarrollo en el tiempo y que en el caso de las ciencias (lógico-matemática) su origen epistemológico se remonta, probablemente, hasta los griegos o antes. Es este conocimiento producido por el esfuerzo del hombre a través del tiempo el que debe ser asimilado por el alumno.

Así mismo, es importante determinar la influencia de las estructuras aprendidas mediante el lenguaje, que preparan al sujeto para resolver un problema. Conviene pensar en la influencia que pueda ejercer el desarrollo de la capacidad para reconocer, determinar, clasificar, etc y hasta qué punto estas estructuras están relacionadas con el lenguaje. Un ejemplo de ello lo constituye la siguiente expresión, muy común en los textos: "Sea ABC un triángulo cualquiera" esta expresión no menciona un triángulo particular (isósceles, escaleno, rectángulo); el estudiante debería saber que la expresión se refiere a una figura geométrica que tiene tres ángulos, tres lados y tres vértices y que puede ser "cualquiera". Por lo tanto, un estudiante para poder (tener capacidad para) resolver un problema tiene que "saber escaparse de los lazos tendidos" (harpedopnates).

Al respecto, Hamwkins (1974) sostiene la imposibilidad de "enseñar" los conceptos significativos (que reducen las redundancias y ordenan la percepción del mundo). Los autores afirman que el alumno puede pensar en la palabra, en el sustantivo que designa el concepto, pero que los conceptos se aprenden cuando el significado del mismo "está incluido en la bolsa de la experiencia personal" y por lo tanto pueden ser codificados y descodificados.

De acuerdo con lo que sabemos hasta ahora todo problema tiene un planteamiento y una pregunta que conforman los datos que deben, a su vez, ser confrontados. El "resolvedor" necesita "inventar y/o descubrir" una(s) estrategia(s) (algoritmo) que le permita(n) solucionar el problema. El algoritmo es un esquema general compuesto por una serie de operaciones intelectuales seleccionadas previamente. Al finalizar la solución, el estudiante necesita confrontar los resultados con los datos expresados en el planteamiento.

Conceptos Matemáticos Esenciales

1. Trazado de gráfico de funciones.

Las representaciones geométricas de las dependencias funcionales, o como más se conoce en el lenguaje estudiantil el trazado de gráficas de funciones, ha sido siempre un tema saturado de dificultades no solo para los alumnos de la enseñanza media, sino incluso para aquellos que siguen cursos de Matemática Superior. Estas dificultades se han hecho eco y han marchado a la par con la poca aplicación práctica que en ocasiones profesores y estudiantes le han conferido a problemas relacionados con el tema.

La experiencia nos demuestra que muchos estudiantes no poseen habilidad en la construcción de gráficas, y hacia el perfeccionamiento de la misma va encaminado nuestro trabajo. No pretendemos con él crear nada nuevo, pero si algo consideramos que tiene de novedoso es un llamado que hacemos a la reflexión de cómo emprender esta tarea sin los auxilios de esa poderosa herramienta que constituye el Cálculo Diferencial.

El gráfico de una función no puede trazarse sin determinadas condiciones previas que debe poseer el estudiante. Valoramos a continuación algunos de los conceptos y contenidos precedentes que deben ser de pleno dominio para el trazado de curvas, y aunque no establecemos un orden jerárquico si reiteramos la importancia de dominar estos conceptos. Nos referiremos en lo adelante a funciones numéricas definidas explícitamente.

Concepto de función: Se entiende por función una **correspondencia** entre dos conjuntos **A** y **B** de tal forma que a cada elemento **x** (variable independiente) del conjunto **A** se le hace corresponder según cierta ley **uno y solo un** elemento **y** (variable dependiente) del conjunto **B**. La notación de tal correspondencia es **y = f(x)** para **x** elemento de **A** e **y** elemento de **B**.

Conceptos previos para el trazado de una función

- Dominio de definición de la función
- Monotonía (Crecimiento y decrecimiento)
- Paridad e imparidad
- Cotas y extremos
- Inyectividad.
- Periodicidad.
- Intercepto.

Como punto de partida tomaremos los gráficos de las funciones elementales. Las gráficas de estas funciones se deben saber representar aproximadamente, en cada caso dando una visión general de las características principales de la curva, pues con mucha frecuencia sucede que el trazado de un gran número de funciones, se realizan por medio de alguna transformación determinada de las gráficas de las funciones elementales.

Es de particular importancia saber qué significado tiene la expresión $y = af[b(x+c)] + d$ y conocer cómo obtener su gráfica a partir del gráfico de $y = f(x)$. Ilustremos esto a través del siguiente ejemplo, donde veremos cual es el aporte de cada uno de los parámetros a, b, c, y d por separado y finalmente la influencia de todos simultáneamente.

El coeficiente a nos da una dilatación o contracción en la dirección del eje de las ordenadas, según sea $|a| > 1$ ó $|a| < 1$, y una reflexión en el eje de las abscisas para $a < 0$ (ver Fig. 2 y Fig.3); b tiene similar significado pero cambiando los ejes (ver Fig. 4) y finalmente c y d significan una traslación en la dirección del eje de las abscisas y ordenadas respectivamente (ver Fig. 5 y Fig. 6).

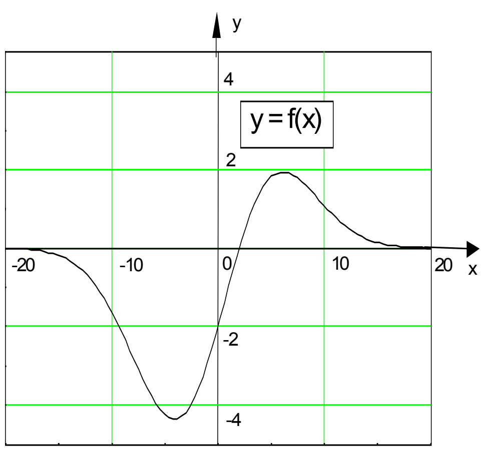

Fig. 1

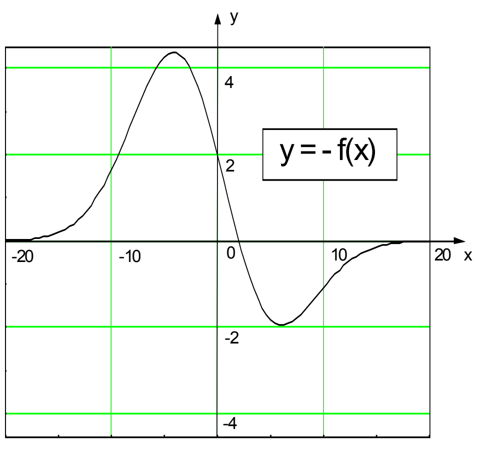

Fig. 2

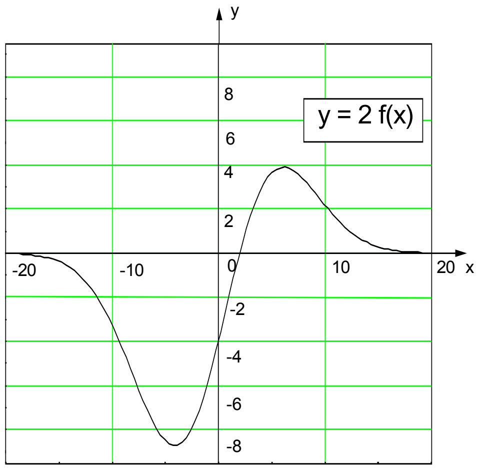

Fig. 3

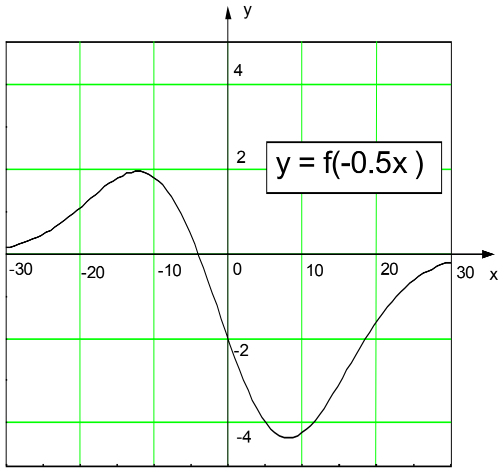

Fig. 4

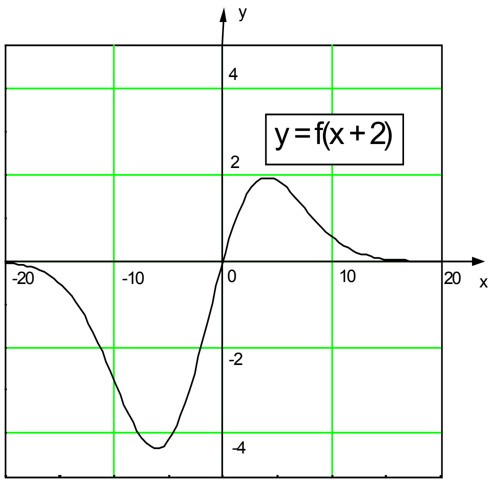

Fig. 5

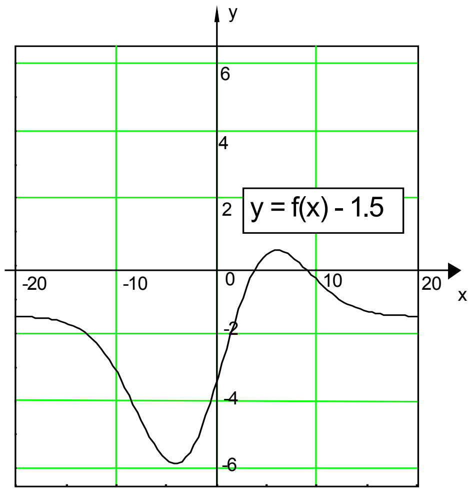

Fig. 6

A continuación se ilustra la combinación de todos los parámetros para obtener la gráfica de la función de la forma $y = af\left[b\left(x+c\right)\right]+d$ a partir de la representación de la función $y = f(x)$.

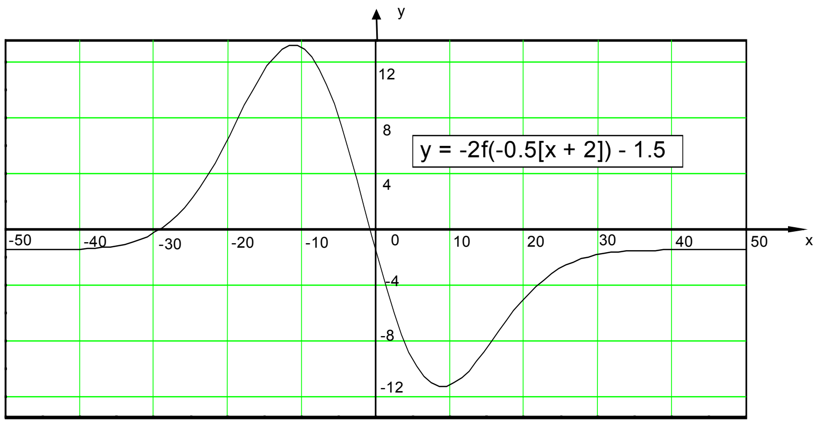

Fig. 7

Deficiencias Cognitivas y como superarlas

Mostraremos un grupo de ejemplos de gran aplicación en la vida del escolar, a los cuales se enfrentan en diferentes disciplina del currículo. Estos problemas tienen sus métodos de solución según el perfil donde se enmarquen, se resolverán aplicando los conceptos básicos del tratamiento de funciones.

Ejemplo: Trazar el gráfico de la función $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

Solución:

Se tiene que Dmf = R \ {1}. La expresión que define a la función es equivalente a $2+\dfrac{1}{x-1}$ la cual está definida para todo x distinto de 1, por lo que podemos escribir $f(x)=2+\dfrac{1}{x-1}$. Conocemos el gráfico de $y=\dfrac{1}{x}$ a partir del cual puede trazarse fácilmente el de $y=\dfrac{1}{x-1}$, que se muestra a continuación

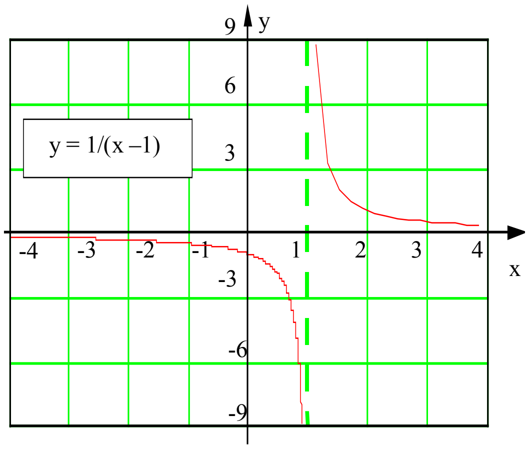

Fig. 8

Observe el lector que estamos en presencia de una traslación en la dirección positiva del eje real de magnitud 1. Los puntos de referencia (1; 1) y (-1; -1) se convierten respectivamente en (2;1) y (0;-1). La recta x = 0 (eje y) se transforma en x = 1.

Solo basta realizar finalmente la traslación en dos unidades de la función en la dirección positiva del eje y. Los dos puntos anteriores (2; 1) y (0; -1) se transforman ahora en (2; 3) y (0; 1). El papel que desempeña en el gráfico la recta y = 0 lo ocupa ahora la recta y = 2. **Observe que de hacer *x = 0* se obtiene el punto *y = 1* donde la curva corta al eje de las ordenadas**

De la expresión que define a la función se obtiene su cero, x =1/2, que no es más que el punto donde la curva corta al eje real. Vea el lector que el recorrido o imagen de la función son los reales excluyendo el valor y = 2.

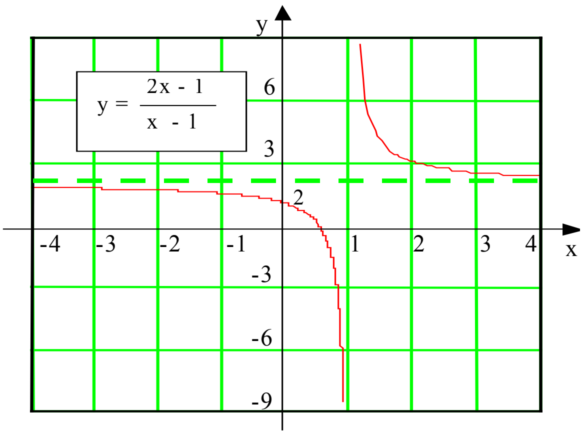

Fig. 9

El siguiente ejemplo ilustra una aplicación práctica del trazado del gráfico de una función a la solución de un problema de Mecánica, que suele resolverse a partir del análisis de los gráficos de velocidad contra tiempo, proceso que en esta ocasión es algo engorroso y requiere de una excelente interpretación de dichos gráficos. Este problema fue muestreado a un gran número de docentes, los cuales no le dieron solución correcta. La solución que proponemos solo requiere del empleo de algunas técnicas algebraicas, el trazado de un gráfico e interpretación del mismo. El problema en cuestión es:

Ejemplo: De un punto fijo sale un cuerpo con una velocidad inicial de 2 m/s y una aceleración dada **a**, 10 segundos más tarde y con una velocidad inicial de 12 m/s y la misma aceleración sale un segundo cuerpo de dicho punto fijo. ¿Cómo debe ser la aceleración **a** para que dichos cuerpos se encuentren?.

Solución:

En la solución de esta problemática debemos partir del hecho que cuando los cuerpos se encuentren han recorrido la misma distancia, las leyes de movimientos de dichos cuerpos están dadas por:

$$S_1 = 2t + \frac{1}{2}at^2 \qquad\qquad S_2 = 12(t-10) + \frac{1}{2}a(t-10)^2$$

De la condición anteriormente señalada se optime que

$$2t + \frac{1}{2}at^2 = 12(t-10) + \frac{1}{2}a(t-10)^2$$

Después de algunas transformaciones elementales se llega a

$$a(t) = \frac{t-12}{t-5} = 1 - \frac{7}{t-5}$$

Esta función se interpreta como la ley que le hace corresponder a cada instante de tiempo **t** un valor de la aceleración **a** para el cual los cuerpos se alcanzan en dicho instante de tiempo. Dicha función tiene como dominio $Dm = \frac{R}{5}$ y que como modelo del problema tiene sentido para t□□□□□□□Observe que t =12 es el cero de la función. Siguiendo la lógica planteada en el trazado del gráfico del ejemplo anterior debemos partir del gráfico de $a_1(t) = \frac{1}{t}$, seguidamente obtener el de $a_2(t) = \frac{1}{t-5}$, a partir de este el de $a_3(t) = -\frac{7}{t-5}$ y este último se traslada una unidad en sentido positivo en la dirección positiva del eje de las ordenadas, obteniéndose el gráfico de a(t). Seguidamente ilustraremos esta situación.

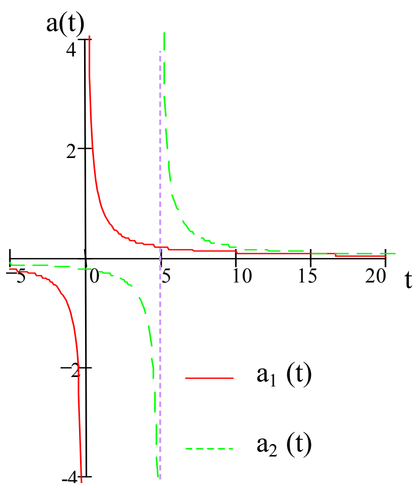

Fig. 10

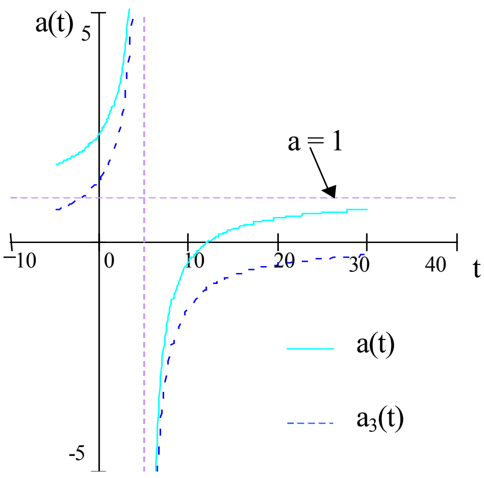

Fig. 11

Del análisis de esta representación gráfica se evidencia que 0 □□**a** **<** 1, con t>12

En algunos ejemplos en los que a pesar de que el proceso de determinación del extremo de la parábola que modela la situación planteada en el problema es un proceso rutinario, como vimos en los ejemplos anteriores, son de un alto grado de complejidad, la que está dada por lo extremadamente difícil que se hace la obtención de dicha función. Estos ejercicios tienen grandes potencialidades para el trabajo de los alumnos que se preparan para los concursos y contribuyen a desarrollar en los estudiantes la perseverancia, la tenacidad y la constancia en el trabajo. Un ejemplo que ilustra esto es el siguiente.

Ejemplo: La longitud de la arista del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ es igual a **a**. E y F son los puntos medios de las aristas BB_1 y CC_1, respectivamente. Los vértices de un triángulo son los puntos de intersección de un plano paralelo a la base del cubo con las rectas AC_1, CE y DF. Halle el valor mínimo del área de semejante triángulo.

Solución

En la figura 12 se representa la situación señalada en el problema y la proyección del triángulo, sobre la base del cubo, al que hay que minimizarle el área. Teniendo en cuenta que el triángulo objeto de análisis está en un plano paralelo a la base del cubo podemos garantizar que tiene la misma área que su proyección sobre la base y que por lo tanto el problema se reduce al trabajo con el triángulo de la proyección. Evidentemente el área de dicho triángulo depende de la altura del plano sobre la base del cubo por lo que al problema se le da solución al escribir el área de □QST como función de la altura **h** del plano paralelo a la base.

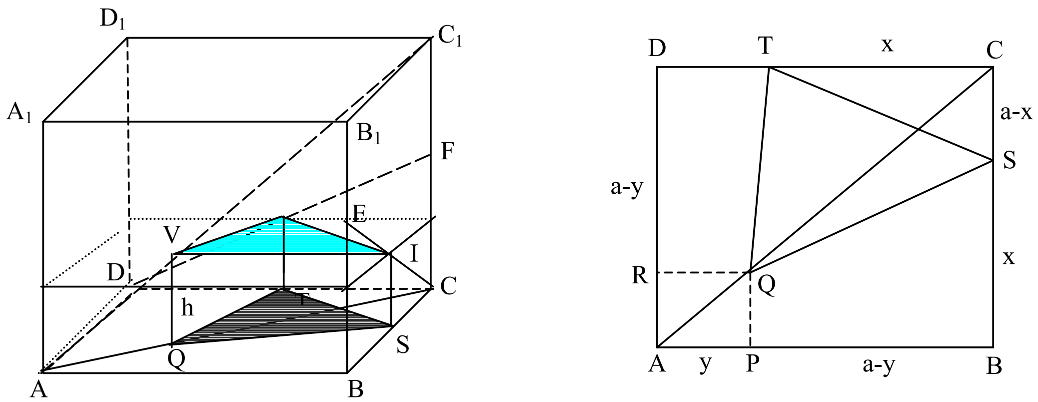

Fig. 12

De las condiciones impuestas en el problema se obtiene que $\overline{BS} = \overline{TC}$ y $\overline{RQ} = \overline{QP}$, denotaremos estas longitudes por x e y respectivamente. Escribamos x e y en función de h.

Teniendo en cuenta □□BCE □□□□□SCI resulta $\dfrac{\overline{SI}}{\overline{BE}} = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{BC}}$, y sustituyendo obtenemos: $\dfrac{h}{a/2} = \dfrac{a-x}{a}$, de donde x = a –2h. De igual manera □□ACC_1 □□□□□AQV y de la relación entre sus lados homólogos se tiene $\dfrac{\overline{QV}}{\overline{CC_1}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}$, sustituyendo $\dfrac{h}{a} = \dfrac{y\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}$, lo que da por resultado y = h.

El área del triángulo QST puede escribirse de la forma siguiente:

$$A_{\Delta QST} = a^2 - y^2 - \frac{x(a-x)}{2} - \frac{(x+y)(a-y)}{2} - \frac{(y+a-x)(a-y)}{2}$$

y sustituyendo las relaciones anteriores se obtiene el área del □QST en función de la altura h

$A(h) = 2h^2 - \dfrac{3}{2}ah + \dfrac{a^2}{2}$ que es la ecuación de una parábola que abre hacia arriba y haciendo un completamiento cuadrático de la misma resulta $A(h) = 2\left(h - \dfrac{3}{8}a\right)^2 + \dfrac{7}{32}a^2$ por lo que su vértice se localiza en $h_{min} = \dfrac{3}{8}a$, siendo $A_{min} = \dfrac{7}{32}a^2$, con lo que concluye el ejercicio.

Un problema mucho más simplificado se obtiene si en el ejercicio anterior partimos de la situación dada en la proyección, el cual tendría el siguiente enunciado:

Sea ABCD un cuadrado de lado **a**, se eligen sobre los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y la diagonal $\overline{AC}$ los puntos S, T y Q respectivamente, de forma tal que: $\overline{BS} = \overline{TC}$ y $\overline{AQ} = \dfrac{\overline{SC}}{\sqrt{2}}$ Determine el área mínima del triángulo STQ.

Pensamos que los ejemplos mostrados proveen al lector de un método adecuado para afrontar este tipo de problemas, donde el grado de dificultad de los mismos está determinado por la búsqueda de la función objetivo que modela el problema.

Ejemplo: Dada la desigualdad $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} \leq 1$ considere $f(x) \leq g(x)$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son dos de las posibles funciones que pueden formarse a partir de los términos de la desigualdad y compruebe graficando las funciones $f(x)$ y $g(x)$ la solución analítica obtenida para la desigualdad inicial.

Solución:

Sea $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=\sqrt{x-2}+1$

Hallemos donde se cortan:

$\sqrt{x+1}=\sqrt{x-2}+1$

su solución es $x=3$.

Solución gráfica de la Inecuación

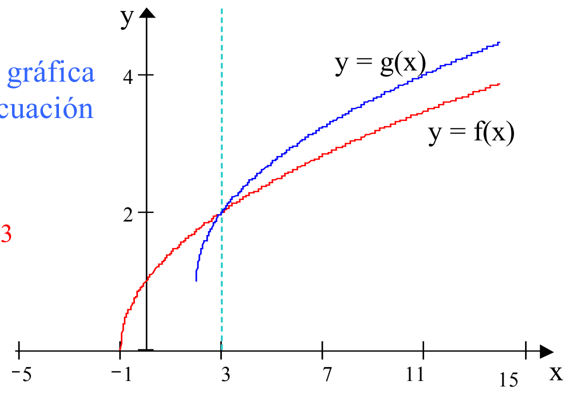

Fig. 13

Grafiquemos ahora las funciones $f(x)$ y $g(x)$, observe que la función f(x) para las $x>3$ su conjunto de valores está por debajo del conjunto de valores de la función $g(x)$.

Como puede observarse una solución gráfica desde el punto de vista "funcional" de la inecuación inicial lo constituye la representación de estas dos funciones. Resuelta la desigualdad por el método tradicional se comprobará que su solución está en el intervalo $[3;+\infty)$.

CONCLUSIONES:

En resumen, este trabajo incorpora un punto de vista de las matemáticas en el que los estudiantes son motivados a discutir el sentido de las ideas matemáticas. El estudio de las propiedades y operaciones con funciones para el trazado de gráficos y la solución de problemas intra y extra matemáticos es considerado como una actividad dinámica donde existe espacio para un nuevo desarrollo teórico-práctico por parte de los estudiantes y de esta manera se garantiza el desarrollo de los procedimientos lógicos del pensamiento, que estos a su vez, influyen en la profundización del pensamiento lógico de los escolares.

La inclusión de ejercicios conscientemente planificados , en los cuales la conclusión es solo probable, o sea no se tienen todos los elementos para afirmar o negar si es acertada, evidencian un incremento en la actitud reflexiva de los alumnos, provocado por el enfrentamiento a estas situaciones indeterminadas, lo cual no es una práctica habitual en nuestras escuelas.

Estas consideraciones han sido aplicadas y validadas por más de cinco años en los estudiantes que ingresan a la carrera de Matemática-Computación del Instituto Superior Pedagógico de nuestro territorio, influyendo positivamente en la formación profesional del egresado. En la actualidad se implementa en los estudiantes de las carreras de ciencias de la Universidad avileña.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Brosseau, G. (1991) Fondements et Methodes le Didactique de Mathematiques. Rechercher en Didactique de Mathematiques. Grenoble. La Pensée Savage. Vol 7. N? 2. (Mimeografiado).
2. BEATON, A.E., Mullis, I.V.S., Martin, M.O., González, E.J., Kelly, D.L., Smith, T.A (1996). Mathematics Achievement in the Middle School Years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). TIMSS International Study Center. Boston. USA.
3. Bolgov, V. (1983), Problemas de las matemáticas Superiores. Edit. MIR. Tomo1.URSS
4. BETH, E.W. y Piaget, J. (1980). Epistemología Matemática y Psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real. Editorial Crítica. Grijalbo. Barcelona.
5. Borasi, R. (1986). On the nature of problems. Educational Studies of Mathematics, 17,pp. 125-141.
6. Campistrous, L. (1993), Lógica procedimientos lógicos del aprendizaje, ICCP, La Habana.
7. Durán, A. (1997), Una propuesta didáctica para el desarrollo del procedimiento lógico de deducción en el nivel secundario, ponencia presentada en el congreso internacional Pedagogía 97, La Habana.
8. Piaget, J. (1974). Estructuralismo. Orbis.
9. Piaget, J. (1982) El punto de vista de Piaget. Lecturas de Psicología del Niño. Comp. Juan DelVal. Tomo 1. Alianza-Universidad.
10. Hamwkins, D. (1974) Cómo aprender lo que no se puede enseñar. Aprendizaje por descubrimiento. Trillas.