INVESTIGACIÓN

Revista Mexicana de Investigación Educativa
enero-junio 1996, vol 1, núm 1, pp. 123-136

Una perspectiva sobre la demostración

*Luis Moreno Armella**

Resumen:
En este trabajo se intenta dar una visión de la evolución conceptual de la demostración matemática y de los mecanismos de adopción y adaptación de esta problemática en la institución escolar. Un hecho de gran importancia lo constituye la tesis que afirma que los mecanismos de la demostración son indisociables de las conceptualizaciones del objeto matemático. Tanto la historia –de la que presentaremos varios ejemplos– como la situación escolar se encargan de dar piso a esta tesis constructivista.

Abstract:
This paper offers an outlook on the conceptual evolution of mathematical proof as well as on the adoption and adaptation mechanisms for this issue at the institution. It advises to consider the thesis which asserts that the validation process is indissociable from the conceptualizations of mathematical objects. Both the history of mathematics –several examples are given–, as well as the circumstances prevailing in school, are ground enough to back up this constructivist thesis.

Introducción

La geometría es la parte de la matemática sobre la que descansa nuestra concepción clásica de demostración. Ahora, con la cada vez más intensa presencia de las computadoras en el sistema educativo, surge la necesidad de repensar el papel de la demostración en el salón de clases. Una pregunta que motiva esta necesidad, es la siguiente:

Si el propósito de las demostraciones en matemáticas es obtener certeza, y si las computadoras suministran certeza absoluta, ¿por qué entonces tomarse el trabajo de realizar demostraciones en el salón de clases?

Esta pregunta ejemplifica el hecho, ampliamente aceptado, de que la concepción que tengamos de la matemática tendrá una influencia sobre el enfoque didáctico con el que la abordamos como objeto de enseñanza. Para tratar de responder a quienes hacen la pregunta anterior es pertinente observar, en primer lugar, que la historia de las matemáticas nos permite acceder a una forma de conceptualización de esta disciplina compatible con los propósitos educativos a los que adherimos. En efecto, a través de la historia podemos entender el carácter evolutivo de los conceptos y las teorías así como el carácter transitorio de los “hechos” que, por otra parte, parecieran establecidos de una vez y para siempre. Detrás del rostro contemporáneo de las teorías y metodologías matemáticas hay todo un progreso gradual de organización que tiende a objetivar el conocimiento en estructuras más estables. Para la educación matemática (y estas consideraciones quizás sean válidas para el conjunto de las ciencias naturales) es fundamental que esta manera de concebir el conocimiento: como un proceso incesante de organización y no como un producto inmodificable en el tiempo, se logre construir por el lado tanto del estudiante como del profesor. De allí que, por otra parte, para comprender el papel y la posición de las demostraciones *en la educación matemática,* es pertinente estudiar cómo es que ellas han evolucionado a lo largo del desarrollo histórico de la

* Investigador Titular del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Correo electrónico: lmorenoa@data.net.mx

matemática. En efecto, las demostraciones han sido, en cada época, reflejo estructural de las concepciones matemáticas de ese entonces.

Este es un hecho fundamental que la educación no puede ignorar. Se ponen de manifiesto, a través de él, los vínculos entre un problema de naturaleza epistemológica y uno de naturaleza cognitiva. Para ilustrarlo, daremos ejemplos tomados de la geometría elemental; siendo posible, además, establecer nexos con nuestra práctica docente.

La educación matemática es una empresa interdisciplinaria. Es importante por ello tratar de explicitar las relaciones entre la historia, la epistemología, la educación y la cognición. En el enfoque constructivista que anima nuestro programa, la historia de las matemáticas se concibe como un laboratorio en donde se cuestionan diversas hipótesis sobre la construcción del conocimiento. Los resultados de este trabajo han de ser comparados con los correspondientes a la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes; el propósito último de la comparación es tratar de establecer cuáles son los mecanismos constructivos comunes a ambas construcciones, que siguen estando en juego en el salón de clases.

La demostración

La demostración es una (para muchos *la*) actividad característica de la matemática; pero no es algo que se haya hecho siempre de la misma manera. De hecho, la actividad demostrativa ha evolucionado con la matemática misma, dejando, en cada momento, el testimonio de la íntima relación entre los métodos de demostración y la naturaleza de los objetos matemáticos en cuestión.

La demostración no es una actividad sintáctica, un mero juego deductivo; por el contrario, en la actividad demostrativa, la cognición se dirige a la construcción de un universo matemático que funciona de modo *significativo* para el sujeto. La demostración conlleva, entonces, la construcción misma de los objetos que intervienen en el discurso demostrativo.

Esta actividad ha sufrido en la enseñanza tradicional, pues allí se pone en juego una concepción de la matemática (implícita muchas veces) que la confunde con una versión formal de esa disciplina. En cierto sentido, la versión formal de un capítulo de la matemática es un testigo, una evidencia, de la *actividad* que se ha desarrollado en dicho campo.

En la enseñanza, muchos profesores ponen en juego una concepción de la matemática que podríamos llamar *icónica*; es decir, la conciben como un conjunto de hechos fijos a los que nos hemos ido aproximando continuamente a lo largo de la historia. Si este fuese el caso, entonces es fácil concluir que las demostraciones han ido alcanzando mayor perfección *con independencia de la naturaleza de los objetos matemáticos involucrados*. Es decir, la actividad demostrativa es un juego sintáctico. Puede presentarse evidencia de que no ha sido así en la historia y nos parece, además, que tal posición es contraproducente desde el punto de vista educativo.

La demostración tiene dos vidas: una epistemológica y otra dentro del salón de clases; la versión icónica de la matemática desvincula estos aspectos. En particular, produce una versión descontextualizada de la matemática. Sin historia.

Para comprender las conexiones entre la demostración en matemática y la que ocurre dentro del salón de clases es importante referirnos a la historia.

La cultura griega introdujo en las matemáticas un elemento que permitió distinguir su versión de esta disciplina de las de culturas anteriores. Este elemento fue el *método deductivo*.

En un cierto momento de su desarrollo, la matemática griega encontró necesario sustituir la verificación empírica (inclusive los argumentos visuales, relativos a hechos geométricos que podían ser “vistos”) por algo nuevo: eso ocurre cuando los objetos de la matemática dejan de ser representaciones gráficas de objetos naturales y empiezan a ser *objetos (abstractos)*, *susceptibles de ser operados simbólicamente*. Algunos ejemplos que condujeron a esta percepción de los objetos geométricos:

a) El cálculo de la altura de la pirámide.

b) El cálculo de la distancia de un barco a la costa.

c) El cálculo del radio de la Tierra.

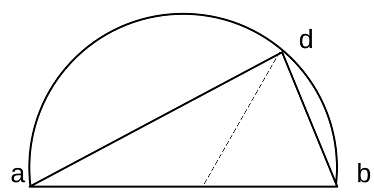
Desde luego hay muchos otros ejemplos, pero los que hemos anotado son suficientes para afirmar que los de *medición indirecta* fueron cruciales en la orientación hacia una nueva reflexión sobre la naturaleza de la matemática. No puede pasar desapercibida la pregunta:

> ¿Cómo sabemos que la medición hecha es correcta si no podemos verificarlo empíricamente?

Para resolver estos problemas fue necesario construir *modelos sobre el papel. La dimensión métrica* genera una incertidumbre a la hora de interpretar la figura; la incertidumbre se refiere a la correspondencia entre el objeto geométrico y su representación. ¿Cómo es posible afirmar algo sobre un objeto real a partir de una representación? El razonamiento sobre estos modelos era deductivo. Podríamos esquematizar la situación así:

Realidad + verificación empírica	⇨	Modelos + Verificación deductiva

Este es el paso hacia la gestación de una geometría deductiva. Debemos enfatizar, por otra parte, que el proceso deductivo involucrado es *local*. Ilustremos esta característica mediante un ejemplo. Para demostrar que el ángulo subtendido por media circunferencia es recto, se procede así:



Debemos probar que el ángulo *adb* es recto. Entonces,

a) Por el teorema de Thales, los ángulos *cad* y *cda* son iguales; por la misma razón, los ángulos *cbd* y *cdb* son iguales.

b) Como la suma de los ángulos del triángulo *abd* es 180 grados y lo mismo ocurre con los triángulos *acd* y *cbd* se deduce fácilmente que la suma de los ángulos *adc* y *bdc* es un ángulo recto.

Todo este proceso deductivo lo llamamos *local*. En efecto, tomando como base los teoremas de

Thales y el relativo al valor numérico de la suma de los ángulos de un triángulo, hemos podido deducir que el ángulo subtendido por media circunferencia es recto. No hemos necesitado de un conocimiento geométrico exhaustivo, sólo de una *organización local de la geometría.* Nos parece pertinente relatar el siguiente episodio, relacionado con esta proposición, que tuvo lugar durante el desarrollo de un curso experimental sobre la demostración. Frente a la demostración que acabamos de presentar, un estudiante propuso otra. Consistía en colocar sobre la figura dibujada en el pizarrón una escuadra (un triangulo rectángulo de madera). Cuando se le objetó que aquello no era una demostración pues dependía del triangulo particular que estaba dibujado sobre el pizarrón, el grupo de estudiantes se retiró a "deliberar" para responder a la objeción del profesor. Su respuesta es altamente ilustrativa. Argumentaron que la acción de colocar la escuadra sobre el triángulo sí constituía una demostración pues "cada vez que el profesor dibuje un triángulo subtendido por media circunferencia, nosotros podremos sobreponerle la escuadra". El argumento sobre la infinidad de posibilidades quedaba, así, superado. *El profesor no podía dar un ejemplo para mostrar que el método de superposición propuesto por los estudiantes fallaba.* Con cierta frecuencia, se oye decir que los estudiantes son insensibles al razonamiento deductivo. El ejemplo que hemos presentado ilustra que no es éste el caso. Lo que ocurre, más bien, es que los problemas de demostración se presentan descontextualizados. ¿Por qué no recurrir a situaciones de medición indirecta para hacer sentir la necesidad de otro argumento que vaya más allá de la verificación "sensible"? El contexto rescata al objeto matemático del discurso formalizante de las presentaciones (prematuras) de la matemática axiomática.

Antes de Euclides, la geometría fue organizada siguiendo esta idea: *pequeñas teorías geométricas que dieron lugar a diferentes organizaciones locales.*
La geometría del triángulo, la geometría de la circunferencia, son ejemplos de cómo puede organizarse el conocimiento de manera local.

Los elementos de Euclides

Este libro fue escrito de acuerdo con la concepción aristotélica de la ciencia. Como una parte fundamental se incluye, en esta concepción, la sistematización del conocimiento geométrico a partir de primeros principios (axiomas) *derivados de un proceso de abstracción del mundo empírico.*

Durante mucho tiempo, la forma de organización propuesta mediante esta metodología aristotélica, dominó y, de hecho, generó una concepción de la ciencia que vemos plasmada, por ejemplo, en la obra de Newton. En esencia, se trata de modelos matemáticos de la física que son resultado de una abstracción a partir de la experiencia sensorial del científico. De allí que los axiomas, al reflejar un hecho de la experiencia del sujeto cognoscente, hayan de ser evidentes en sí mismos.

La obra de Hilbert sobre los fundamentos de la geometría de 1898, (Hilbert, 1971) cambió este panorama de modo sustancial. Allí no se tiene en cuenta el carácter de "verdad" de los axiomas; lo fundamental es que el conjunto de axiomas sea consistente; es decir, que no se contradigan entre sí. Por ejemplo, no debe haber, además del axioma de unicidad de la paralela por un punto exterior a una recta, otro que afirme –o del cual pudiera deducirse– la existencia de más de una paralela por un punto exterior a una recta. Los resultados que se deduzcan de los axiomas, tendrán el carácter de "deducciones" pero no un valor asociado de verdad.

La verdad $\dashrightarrow$ La consistencia

Este esquema sugiere la transformación que sufrió la axiomatización de Euclides en manos de Hilbert: *una extracción del significado* de los términos y proposiciones de la geometría y su correspondiente sustitución por el criterio lógico de la consistencia. Este proceso de "desustanciación" de la geometría, en el que ya no importa la naturaleza de los objetos de los que se habla sino la coherencia del discurso, corresponde a un movimiento general en la matemática del siglo XIX.

Geometría y desustanciación

La obra de Hilbert sobre los fundamentos de la geometría apareció como consecuencia de un movimiento general de la matemática: la búsqueda de fundamentos de naturaleza analítica para esta disciplina. Se partió de una idea expresada por Hilbert sobre los axiomas de una teoría: lo realmente importante no son los significados (interpretaciones) que podamos asociar a tales axiomas sino la coherencia que ellos mantengan entre sí. Los axiomas juegan el papel de “definiciones implícitas” de los términos de la teoría que están “condicionados” por estos axiomas. Entonces, según Hilbert, no importa lo que “son” los puntos, las líneas y los planos; lo que importa son las relaciones entre ellos, que están dadas por los axiomas. El libro *¿Qué es la matemática?* (Courant-Robbins, 1962; véase su introducción) expresa este punto de vista de manera espléndida:

> A través de los tiempos los matemáticos consideraron sus objetos –números, puntos, etcétera– como cosas sustanciales en sí. Pero en vista de que aquéllos desafiaban una descripción adecuada, los matemáticos del siglo pasado llegaron a la convicción de que el problema de la significación de dichos objetos como cosas sustanciales no tenía sentido dentro de la matemática. Las únicas proposiciones relativas a ellos que importan son las que expresan las relaciones mutuas entre objetos indefinidos: su estructura y relaciones... la percepción de la necesidad de la desustanciación de los objetos matemáticos ha sido uno de los resultados más fecundos del desarrollo axiomático moderno.

Un proceso que puede ser identificado como crucial para desencadenar el programa de desustanciación impulsado por Hilbert: la fundación de las geometrías no-euclidianas. Con el advenimiento de la geometría de Lobachevsky, quedó inaugurado un nuevo camino para la geometría: *la geometría como representación de un espacio posible*. En otros términos, *el paso de Euclides a Lobachevsky es el paso de la geometría de los objetos a la geometría de las estructuras*.

Axiomatización y enseñanza

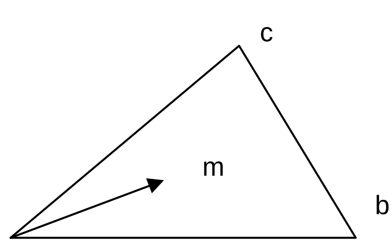
¿Cómo han afectado estos procesos, propios del desarrollo de la matemática, a su enseñanza? Ya hemos dicho que la concepción que el profesor tiene de su disciplina afecta, en gran medida, la forma como él (ella) enseña.

De acuerdo con los valores dominantes en el ámbito de la matemática escolar, la matemática *es* la matemática “rigurosa”. Se desprende de esto que la enseñanza deba orientarse a alcanzar, como meta del proceso educativo, un aprendizaje riguroso de la disciplina. Estos propósitos olvidan que:

en el tránsito de la matemática como objeto de investigación a la matemática como objeto de enseñanza, está la actividad cognitiva del estudiante: es decir, *la matemática como objeto de aprendizaje.*

En términos más concretos, esto significa que los criterios de validación que se emplean en la investigación (en la presentación formal de los resultados) *han sido trasladados a la matemática escolar como criterios para medir el nivel de aprendizaje del estudiante*. Es decir, se hace uso de un criterio lógico para discriminar una situación de carácter cognitivo. La actitud generada por esta concepción se refleja bien en el siguiente ejemplo:

Los estudiantes encuentran “innecesario” tener que demostrar que la línea *m* intersecta al lado *bc*:



Esto nos lleva a preguntarnos: ¿cómo hacer que el estudiante sienta la necesidad de una demostración?

Repasando la historia, observamos que hay un tránsito de las demostraciones visuales a las deductivas; éste involucra una transformación profunda en cuanto a la concepción de los objetos de la matemática misma. Esto también es importante desde la perspectiva del aprendizaje. En efecto, la actividad cognitiva del estudiante se desenvuelve a partir de la concepción que tenga de los objetos matemáticos y de su intencionalidad: es decir de "para qué están allí". De manera que la didáctica de la matemática debe tomar en cuenta que las demostraciones, y el consiguiente nivel de rigor, no pueden adquirirse sin una actividad constructora del significado matemático en cada etapa de la evolución conceptual de sus objetos.

Con estos propósitos, libros como *Proofs without Words* (Nelsen, 1993), están siendo usados con provecho. Por ejemplo, con estos medios, quedan estrechamente vinculadas con la naturaleza del objeto matemático en cuestión preguntas como *¿cuándo una prueba visual es suficiente?*

Los problemas cognitivos y los epistemológicos están estrechamente emparentados.

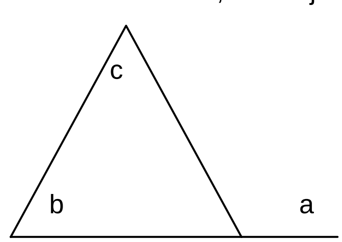
La lógica y la axiomática en el aula

Desde la perspectiva didáctica, es importante distinguir entre el razonamiento lógico y el realizado dentro de un sistema axiomático. El ejemplo que hemos presentado anteriormente sobre organizaciones locales, nos ayuda a entender esta situación. El razonamiento que presentaron los estudiantes es, podríamos decir, impecable desde la perspectiva lógica (natural). En efecto, dada la naturaleza de las figuras geométricas que se manejaban, es decir, *figuras geométricas que coincidían con su representación sobre el pizarrón,* el razonamiento es correcto. El profesor no puede argumentar sobre la infinidad de situaciones posibles pues las figuras de la geometría son las que quedan dibujadas sobre el pizarrón. No hay otras. El razonamiento matemático depende de la naturaleza de los objetos con los que se trabaja. Este es un profundo principio de la cognición matemática.

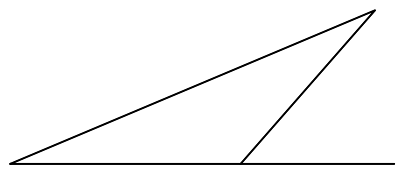
Podríamos decir que el razonamiento de los estudiantes es de corte argumentativo, está sustentado en las inferencias que ellos hacen a partir de las representaciones. En estos casos *el contenido semántico de las proposiciones bajo estudio es crucial.* En cambio, en el razonamiento axiomático, lo crucial es el estatuto operatorio que las proposiciones tienen en el razonamiento. Es decir, las relaciones que se pueden establecer entre ellas no se dan en términos semánticos sino de la "posición" que tienen dentro de la situación: hipótesis, tesis, etcétera. Para la cognición el problema que aquí se presenta es reconocer que el estatuto operatorio es independiente del contenido semántico. Esta puede ser la clave para entender las dificultades que tiene el estudiante para abandonar el campo semántico en una situación de demostración. Veamos otros ejemplos para situar, con mayor precisión, nuestra posición.

Los estudiantes no le encuentran sentido a tener que demostrar que el ángulo exterior en un triángulo es mayor que cualquiera de los interiores no adyacentes. Aquí el profesor, generalmente, pierde una oportunidad de experimentar con figuras que induzcan un margen de duda al estudiante y que eventualmente puede servir para que capte la necesidad de una demostración al sentir la necesidad de recurrir al estatuto operatorio (análogo a las situaciones de medición indirecta).

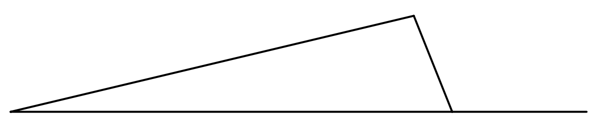
Cuando estudiamos esta proposición en la clase, el dibujo que hicimos fue el siguiente:



En ese momento, los estudiantes argumentaron que la demostración era innecesaria pues era obvio del dibujo que el ángulo *a* era obtuso mientras que los ángulos *b* y *c* eran agudos. Entonces, se propuso la siguiente figura:



Ahora, tanto el ángulo exterior como los interiores no-adyacentes son agudos. Frente a esta nueva situación los estudiantes aceptaron que su razonamiento anterior no era válido. Recordando lo que habían argumentado en el caso del ángulo subtendido por una semi-circunferencia, propusieron que en cada una de las nuevas situaciones podía medirse el ángulo exterior con ayuda de un transportador y verificar entonces que era mayor que los interiores no-adyacentes. Frente a la siguiente figura:



Se vieron obligados a aceptar que el ángulo exterior parecía igual al interior no adyacente del vértice superior. Aunque era claro que el ángulo exterior era mayor que el interior de la izquierda.

Pensamos que esta diversidad de situaciones haría ver a los estudiantes la necesidad de demostrar la proposición (no comprobar) dentro del marco de una organización local; sin embargo, la conclusión a la que arribamos, a pregunta expresa, fue que *¡la comprobación de la proposición dependía de la figura considerada!*
La conclusión de esta experiencia ha sido que la conexión entre los aspectos semánticos y las organizaciones locales (y globales) debe ser trabajada mucho más a nivel de los cursos de matemáticas. Hay aspectos cognitivos y otros formales en cada prueba; la educación matemática debe proponerse el tendido de puentes entre estos aspectos.

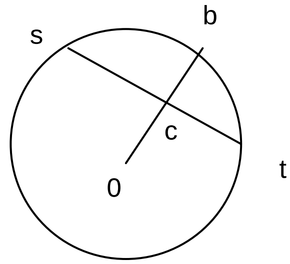
Perspectiva final

El análisis histórico de la matemática también nos brinda un escenario en donde podemos ver en acción cómo las concepciones sobre los objetos matemáticos tienen su influencia sobre la metodología de la demostración. Daremos un ejemplo final que nos parece digno de atención dentro del marco de reflexiones propuesto por este trabajo.

En el libro III, proposición 2, (Heath 1956; tomo II pág. 9) se presenta la siguiente:

> el segmento determinado por dos puntos que se hallan sobre una circunferencia está totalmente contenido en el interior de dicha circunferencia.

La demostración que presenta Euclides se hace por contradicción suponiendo que el segmento no está totalmente contenido en el interior. Después de la demostración, sir Thomas Heath, en su comentario, se muestra sorprendido por el complicado argumento de Euclides y propone otra versión, que a su juicio, es más sencilla. Su argumento en líneas generales es:



Dado el segmento *st* elíjase un punto arbitrario *c* de dicho segmento. Ahora consideremos el radio *ob* determinado por los puntos *o* y *c*. Es claro que *c* está entre *o* y *b* y, por lo tanto, está en el interior de la circunferencia. Como el punto *c* es arbitrario, entonces todos los puntos del segmento *st* están en el interior de la circunferencia y así el segmento *st* está en el interior de la circunferencia.

¿Por qué, entonces, Euclides se toma el trabajo de hacer una demostración por contradicción, que resulta tan complicada? La razón profunda está en cómo Euclides concibe el segmento. Para él, un segmento es un objeto sintético, uno lo toma "como es". Si bien es cierto que un segmento contiene puntos (la intersección de dos segmentos es un punto) no se puede decir que el segmento como tal sea un conjunto de puntos. Hay algo más en él. Por ejemplo, un segmento es continuo (por naturaleza) en el sentido que puede ser sub-dividido indefinidamente. Para Euclides, entonces, la demostración que nos presenta Heath *es imposible* dentro del marco de su geometría. Toda esta discusión ilustra cómo la concepción del objeto matemático tiene repercusiones tanto metodológicas como cognitivas. *La historia de la matemática, imaginada como laboratorio epistemológico* (para usar la expresión célebre de Dijksterhuis, véase Piaget-García, 1983, p.60) es el espacio idóneo para estas búsquedas. Nos permite ver que la comprensión siempre ha precedido a la consistencia. Y ésta es una observación crucial para la didáctica.

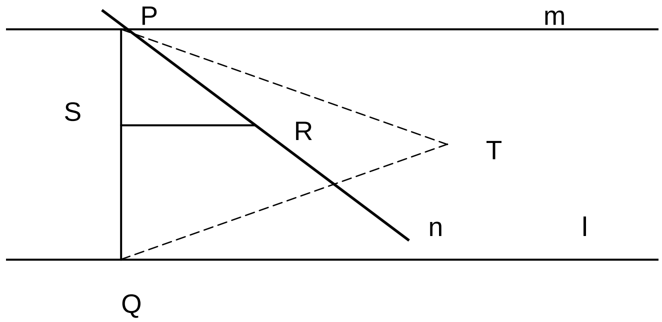
Perspectiva estructural

Podemos decir que el formalismo es la condición mediante la que la acción queda separada del significado.

Hemos visto los extremos de una historia. Digámoslo así: *todo comenzó con Euclides y terminó con Hilbert.* Este camino es el que lleva de la verdad a la consistencia.

La ciencia griega representa el resultado de una actividad cognitiva sobre lo empírico. La ciencia de Hilbert es resultado de una reflexión sobre una ciencia ya constituida, cada concepto es resultado de una reflexión sobre el contexto total del concepto. Entonces, la geometría griega trata de descubrir verdades ocultas mediante un *razonamiento deductivo íntimamente vinculado a la ontología* (véase Torreti, 1978). Esta característica subsiste durante siglos y puede verse *cómo influye en la estructura de los razonamientos* que buscan demostrar el v postulado. Consideremos por ejemplo, el trabajo de Wallis (1616-1704; véase Lobachevsky, 1974), su estrategia se apoya en la existencia de triángulos semejantes. Es decir, en la posibilidad (hipotética) de reproducir una figura a cualquier escala deseada. Hipótesis que, por otra parte, parece muy natural. Y de hecho lo es en el sentido que concuerda con la naturaleza euclidiana que atribuimos al espacio físico a partir de nuestras experiencias.

Uno de los postulados de Euclides nos dice que con cualquier centro y cualquier radio puede trazarse una circunferencia. En particular, pueden trazarse diferentes circunferencias concéntricas. Dado que los triángulos son figuras aún más simples, esta observación hace plausible suponer la existencia de triángulos semejantes. Esto es parte de la ontología subyacente a la geometría.



La demostración de Wallis es como sigue: dado el punto *P* exterior a la recta *l* construýase la paralela *m* a *l* por *P*. *PQ* es perpendicular tanto a *l* como a *m*. Sea *n* otra recta distinta a *m* y a la recta determinada por *PQ*. Tómese *R* sobre *n*, como indica la figura y *S* el pie de la perpendicular *RS*. Considerando el triángulo *PSR* y el lado *PQ* debe existir un punto *T* de modo que el triángulo *PQT* sea semejante al triángulo *PSR*. Se concluye que el rayo *PR* coincide con el rayo *PT*. Es decir *T* está sobre el rayo *PR*. Por otro lado, el ángulo *PQT* es recto. Entonces *t* está en la intersección de *l* y *n*. Es decir, la única paralela a *l* por *P* es *m*.

Llevando el análisis más lejos podemos demostrar, a su vez, que la existencia de triángulos semejantes se sigue del V postulado. Como son lógicamente equivalentes, la prueba de Wallis sufre del mal de "petición de principio". El mal del que sufren todas las demostraciones del V postulado cuando se tratan de realizar desde los otros cuatro de Euclides. Esto es lo que llevó a Lobachevsky a declarar en sus *Nuevos principios de la geometría* de 1835 (Lobachevsky, 1974):

> Es bien conocido que hasta la fecha la Teoría de las Paralelas ha permanecido incompleta. Los esfuerzos infructuosos hechos desde tiempos de Euclides y a lo largo de un periodo de más de dos mil años, me han convencido de que los conceptos involucrados en esta investigación no contienen la verdad de lo que se desea demostrar; que para establecerla se necesita el apoyo del experimento, por ejemplo de observaciones astronómicas, como es el caso con otras leyes de la naturaleza.

Este párrafo muestra de modo convincente que hacia 1835 estaba clara la independencia lógica del V postulado de los restantes de la geometría euclidiana, y que se había producido una ruptura en la interpretación que la tradición había impuesto entre la geometría y el espacio físico. El problema abierto por el Quinto Postulado es de una naturaleza distinta a lo que hemos estado discutiendo, en cuanto a la demostración. Aquí se trata de investigar la consistencia y la completez de todo un sistema axiomático, no de una proposición en su interior. Ya no es un problema de relaciones entre proposiciones ni del significado atribuido a una proposición. Es un problema de toda una estructura. La epistemología genética (Piaget-García, 1983) ha descrito estas transformaciones conceptuales en términos de la tríada: *intra, inter y trans* para referirse al paso de un análisis centrado en el objeto a uno centrado en las relaciones entre los objetos (en términos de sus propiedades) y de allí al estudio de las estructuras que es donde podemos ubicar los problemas de consistencia y completez de la geometría. En términos cognitivos, el sujeto transforma su capacidad de abstracción sobre lo empírico en una capacidad de abstracción reflexiva.

Bibliografía

Courant, R.; Robbins, H. (1962). *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

Hilbert, D. (1971). *Foundations of Geometry*, La Salle, Illinois: Open Court.

Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*, Nueva York: Dover Editions.

Lobachevsky, N. (1974). *Nuovi Principi della Geometria*, Italia: Universale Scientifica Boringhieri.

Nelsen, R. (1993). *Proofs without words,* Mathematical association of America.

Piaget, J. y García, R. (1983). *Psicogénesis e historia de la ciencia*, México: Siglo XXI editores.

Torreti, R. (1978). *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Reidel.